

**Методичне забезпечення
самостійної роботи
з навчальної дисципліни
«Вища математика»**

для студентів спеціальності 123

“Комп’ютерна інженерія”

План самостійної роботи

з навчальної дисципліни «Вища математика»

Ранг матриці.

Мета: *знати:* як обчислювати визначники 2-го та 3-го порядку;
 означення рангу матриці;
 методи обчислення рангу;
 елементарні перетворення матриці.
вміти: обчислювати визначники;
 знаходити ранг матриці методом окантування;
 знаходити ранг матриці за допомогою елементарних
 перетворень матриці

Час – 2 години

Навчальні питання:

- 1.Означення рангу матриці.
- 2.Методи знаходження рангу матриці.

Методичні рекомендації

Самостійно вивчаючи запропоновану тему студент повинен засвоїти такі основні положення:

По-перше: ранг матриці не перевищує розміри матриці.

По-друге: звернути увагу на властивості рангу.

По-третє: добре володіти навиками обчислення матриць.

Рекомендована література:

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с
5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

Навчальні матеріали для самостійної роботи на тему
Ранг матриці.

I Теоретичний матеріал

Розглянемо прямокутну матрицю розмірності $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Виділимо в матриці A будь-які k рядків і стільки ж стовпців, де число k не більше чисел m і n .

Визначник порядку k , складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називають мінором k -го порядку матриці A .

Означення. Рангом матриці A називають найвищий порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці і позначають $r(A)$.

Ранг матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних стовпців (рядків) матриці.

Із означення випливають такі властивості рангу матриці.

1. Ранг матриці дорівнює нулю тільки тоді, якщо матриця нульова. В інших випадках ранг матриці дорівнює деякому додатному числу.
2. Ранг прямокутної матриці не перевищує меншого із двох чисел m і n , тобто $0 \leq r \leq \min(m, n)$
3. Для квадратної матриці n -го порядку $r=n$ тільки тоді, коли матриця не вироджена.
4. Якщо $r < n$, то визначник матриці дорівнює нулю.

Наприклад, матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

має такі мінори другого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$.

Мінором третього порядку даної матриці є її визначник.

Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називають базисним. У матриці може бути кілька базисних мінорів.

Розглянемо два методи знаходження рангу матриці.

1. *Метод окантування* - полягає у такому. Якщо всі мінори 1-го порядку, тобто елементи матриці, дорівнюють нулю, то $r = 0$.

Якщо хоч один із мінорів 1-го порядку не дорівнює нулю, а всі мінори 2-го порядку дорівнюють нулю, то $r = 1$. Аналогічно, якщо мінор 2-го порядку не дорівнює нулю, то досліджуємо мінори 3-го порядку. Таким способом знаходять мінор k -го порядку, що не дорівнює нулю, і перевіряють, чи є не нульові мінори $(k + 1)$ -го порядку. Якщо всі

мінори $(k + 1)$ -го порядку дорівнюють нулю, то ранг матриці A дорівнює числу k . Такі мінори $(k + 1)$ -го порядку, як правило, знаходять шляхом «окантування» мінора k -го порядку

Приклад 1. Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$.

Розв'язок. Усі мінори 2-го порядку

$$M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Отже, $r(A) = 1$.

Приклад 2. Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 8 & 10 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язок. Оскільки в матриці A є мінори 1-го порядку, які не дорівнюють нулю, то ранг її може дорівнювати одиниці. Мінор 2-го порядку

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{але, наприклад, мінор } M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 21 \neq 0.$$

Окантовуючи мінор M_2 , одержимо мінор 3-го порядку $M_3 = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -6 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$.

Розглянемо мінори 4-го порядку, які окантовують даний мінор M_3 :

$$M_4 = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 10 & 4 \end{vmatrix}, \quad M_5 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 10 & 4 \end{vmatrix}, \quad M_6 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 10 & 4 \end{vmatrix}, \quad M_7 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 8 & 4 \end{vmatrix},$$

$$M_8 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Усі вони дорівнюють нулю, оскільки перший і четвертий рядки пропорційні. Значить ранг матриці A дорівнює 3.

Найбільш ефективним методом знаходження рангу матриці є метод елементарних перетворень.

Означення. Елементарними перетвореннями матриці називають такі перетворення:

1) перестановка стовпців (рядків) матриці;

2) множення усіх елементів стовпця (рядка) на число $k \neq 0$;

3) додавання до елементів стовпця (рядка) відповідних елементів іншого стовпця (рядка), помножених на деяке число.

Елементарні перетворення не змінюють ранг матриці, але дозволяють привести матрицю до матриці іншого вигляду, коли нижче головної діагоналі усі елементи матриці - нулі. Тоді ранг матриці дорівнює кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля.

Означення. Дві матриці називаються еквівалентними, якщо одну із них одержуємо з другої за допомогою скінченного числа елементарних перетворень. Еквівалентні матриці не однакові, однак вони мають однакові ранги.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то це записують так: $A \sim B$.

Приклад 3. Знайти ранги матриць A та B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Матриці A та B розміру 3×4 . Найвищий порядок мінорів цих матриць дорівнює 3. Кожна матриця має 4 таких мінора.

Застосуємо метод елементарних перетворень для одержання нулів нижче головної діагоналі

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким чином, матриця A зведена до матриці, яка має 3 відмінних від нуля елемента на головній діагоналі, а нижче головної діагоналі - нулі. Тому $\text{г}(A)=3$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -3 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \times 10 \leftrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{row swap}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тепер два елемента головної діагоналі відмінні від нуля, тому $\text{г}(B)=2$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ.

1. Знайдіть ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

Розв'язання. Виділений у матриці мінор другого порядку

$$M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Обвідними для нього мінорами третього порядку є:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ і } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Обидва мінори третього порядку рівні нулю, а мінор другого порядку відмінний від нуля, отже $r(A)=2$.

2. Знайдіть ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$

Розв'язання. Виконавши елементарні перетворення, дістанемо

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначник третього порядку, складений з елементів, що стоять на перетині перших трьох рядків і стовпців останньої матриці, не дорівнює нулю, а всі мінори четвертого порядку рівні нулю. Отже, $r(A)=3$.

Питання для самоконтролю:

- 1.Що таке ранг матриці?
- 2.Які основні методи знаходження матриць?
- 3.Які основні елементарні перетворення матриць?
- 4.У чому полягає метод окантування?

Критерії оцінювання теми «Ранг матриці», винесеної на самостійне вивчення.
Максимальна кількість балів набраних за даною темою оцінюється в 5 балів. Види завдань та їх оцінювання, за даною темою наведені в таблиці:

№ п/п	Вид роботи	Кількість набраних балів
1	Студент написав повний конспект за даною темою в зошит (або роздрукував у окрему власну папку)	3б
	Студент написав неповний конспект за даною темою в зошит (або роздрукував у окрему власну папку), але більше половини	1,5б
	В іншому випадку	-1б
2	Відповіді на питання для самоконтролю	
	Студент правильно відповів на чотири запропоновані йому питання з даного переліку – по 0,5 б за правильну відповідь	2б
	Студент дав, але не повну відповідь – 0, 25 б	0,25б - 1б
	Студент не відповів або не правильно відповів на поставлене питання – по (-0,5б) за питання	-2б

Бали отримані за кожен вид роботи складаються і отримаємо загальну кількість балів за даною темою.

Табличка оцінювання за 5- ти бальною системою:

За модульною системою	За 5- ти бальною системою
4,5-5,0 б	5- відмінно
3,5 – 4,4 б	4- добре
2,5 – 3,4 б	3- задовільно
менше 2,4 б	2- незадовільно

Робота виконується вдома в робочому або окремому зошиті для самостійних робіт, або в окремій папці для самостійних робіт. Кількість часу на виконання роботи – 2 години.

План самостійної роботи

з навчальної дисципліни «Вища математика»

Загальні поняття векторної алгебри

Мета: *знати:* означення вектора;

формули для знаходження довжини вектора, відстані між точками, кута між векторами.

вміти: скалярний добуток двох векторів.

Час – 2 години

Навчальні питання:

1. Вектори та дії над ними.
2. Дії над векторами, що задані координатами.

Методичні рекомендації

Самостійно вивчаючи запропоновану тему студент повинен засвоїти такі основні положення:

По-перше: вивчити формули для знаходження довжини вектора, відстані між точками.

По-друге: знаходити скалярний добуток двох векторів.

Рекомендована література:

5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с

Навчальні матеріали для самостійної роботи на тему

Загальні поняття векторної алгебри

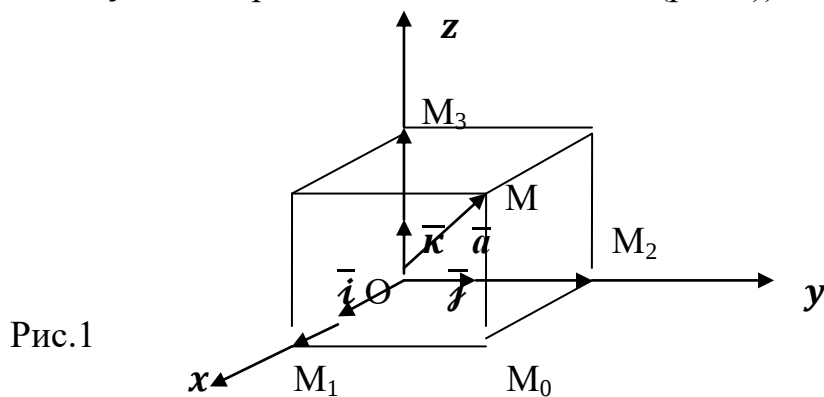
I Теоретичний матеріал

Точку O й упорядковану трійку некомпланарних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (базису) називають декартовою системою координат у просторі.

Точка O – початок координат, а осі, які проходять через початок координат у напрямі базисних векторів, називають осями координат.

Упорядковану трійку одиничних попарно ортогональних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ($|\vec{i}| = 1, |\vec{j}| = 1, |\vec{k}| = 1$) називають ортонормованим базисом.

Прямокутною декартовою системою координат (ПДСК) у просторі називають декартову систему, базис якої ортонормований, і позначають її через $Oxyz$ (Ox - вісь абсцис, Oy - вісь ординат, Oz - вісь аплікат (рис.1)).



Розклад вектора за ортами координатних осей.

Нехай $\vec{a}$ - довільний ненульовий вектор простору, сумістимо його початок з початком координат: $\vec{a} = \overline{OM}$ (рис.1).

Проведемо через точку M площини, паралельні координатним площинам. Точки перетину цих площин з осями координат позначимо через M_1 , M_2 та M_3 . Дістанемо прямокутний паралелепіпед, однією з діагоналей якого є вектор $\overline{OM}$. Тоді $np_{Ox} \vec{a} = np_{Ox} \overline{OM} = |\overline{OM_1}|$, $np_{Oy} \vec{a} = |\overline{OM_2}|$, $np_{Oz} \vec{a} = |\overline{OM_3}|$.

Позначимо $|\overline{OM_1}| = a_x$, $|\overline{OM_2}| = a_y$, $|\overline{OM_3}| = a_z$.

Враховуючи векторні рівності

$$\overline{OM_1} = |\overline{OM_1}| \cdot \vec{i} = a_x \cdot \vec{i}, \quad \overline{OM_2} = |\overline{OM_2}| \cdot \vec{j} = a_y \cdot \vec{j}, \quad \overline{OM_3} = |\overline{OM_3}| \cdot \vec{k} = a_z \cdot \vec{k},$$

$$\vec{a} = \overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{M_1M_0} + \overline{M_0M} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3},$$

дістанемо

$$\boxed{\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}} \quad (1)$$

Ця формула є основою у векторній алгебрі і називається розкладом вектора $\vec{a}$ за ортонормованим базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Векторну рівність (1) у символічній формі ще записують так:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \text{ або } \vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}.$$

Довжина вектора. Напрямні косинуси.

Довжину (модуль) вектора $\vec{a}$ обчислюють за формулою

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Ця формула безпосередньо випливає з того факту, що квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його ребер.

Оскільки координати вектора $\vec{a}$ - це проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі, то

$$\begin{aligned} a_x &= np_x \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha \\ a_y &= np_y \vec{a} = |\vec{a}| \cos \beta \\ a_z &= np_z \vec{a} = |\vec{a}| \cos \gamma \end{aligned}$$

де α, β, γ - кути, які вектор $\vec{a}$ утворює з осями координат Ox, Oy, Oz відповідно (рис.2)

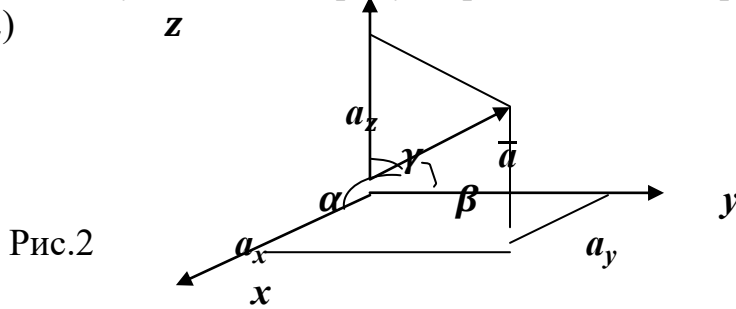


Рис.2

Тоді
$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \quad (2)$$

Косинуси $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ кутів α, β, γ називають напрямними косинусами вектора $\vec{a}$; вони визначають напрям вектора $\vec{a}$ в системі $Oxyz$ і задовольняють рівність

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Звідси випливає, що орт вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ має вигляд

$$\vec{e}_a = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\},$$

де напрямні косинуси визначають за формулою (2).

Дії над векторами.

Нехай вектори задані своїми координатами, тобто

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z),$$

тоді

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

Іншими словами, при додаванні векторів їхні відповідні координати додають; при множенні вектора на скаляр координати вектора множать на цей скаляр.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їхні відповідні координати:

$$a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z.$$

Колінеарність векторів.

З'ясуємо умови колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами. Нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$, тоді $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, де $\lambda \neq 0$ - деяке число. Тоді

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = \lambda (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}).$$

Звідси

$$a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z$$

тобто

$$\frac{a_x}{e_x} = \frac{a_y}{e_y} = \frac{a_z}{e_z} \quad (3)$$

Отже, координати колінеарних векторів пропорційні. І навпаки, якщо координати двох векторів пропорційні, то ці вектори колінеарні.

Координати точки.

Довільній точці M простору можна зіставити у ПДСК вектор $\vec{r} = \overline{OM}$, який називають радіус-вектором точки M . Тоді існує єдина трійка чисел (x, y, z) така, що

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

Координати x, y, z радіус-вектора $\overline{OM}$ називають координатами точки M і пишуть $M(x, y, z)$.

Якщо відомі координати початку $A(x_1, y_1, z_1)$ та кінця $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора $\overline{AB}$, то його координати знаходять за формулою

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Довжину вектора $\overline{AB}$ (або відстань між точками A та B) записують так:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Поділ відрізка у даному відношенні.

Нехай задано відрізок A_1A_2 точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$ і $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Тоді координати точки $M(x, y, z)$, яка ділить цей відрізок у відношенні λ , тобто $|\overline{A_1M}| : |\overline{MA_2}| = \lambda$, знаходять за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (4)$$

Зокрема, координати точки, яка ділить відрізок навпіл ($\lambda = 1$), такі:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

II Розв'язування практичних завдань

1. Дано точки $M_1(-4; 5; -6)$, $M_2(5; -7; 2)$. Знайдіть:

- координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;
- координати точки M , яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $|\overline{M_1M}| : |\overline{MM_2}| = 3:5$.

2. Знайдіть вектор $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, якщо він утворює з осями Ox і Oy кути $\alpha = \frac{\pi}{4}$ та $\beta = \frac{\pi}{3}$ відповідно, і $|\vec{a}| = 6$.

3. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1 = -\vec{a} + 4\vec{b}$ і $\vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ побудовані на векторах $\vec{a} = \{2; -2; 3\}$ і $\vec{b} = \{3; 1; -1\}$?
4. Відомо, що вектори $\vec{a} = 7\vec{i} + \beta\vec{j} + 5\vec{k}$ та $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 3\vec{j} - 10\vec{k}$ колінеарні. Знайдіть α і β .
5. Знайдіть подання вектора $\vec{a} = 5\vec{i} - 8\vec{j}$ у базисі $\vec{p} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{q} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте означення вектора.
2. Які вектори називаються компланарними?
3. Які вектори називаються колінеарними?
4. Як знайти скалярний добуток векторів?
5. Назвіть формулу для знаходження кута між векторами.

Критерії оцінювання теми «Загальні поняття векторної алгебри», винесеної на самостійне вивчення.

Максимальна кількість балів набраних за даною темою оцінюється в 5 балів. Види завдань та їх оцінювання, за даною темою наведені в таблиці:

№ п/п	Вид роботи	Кількість набраних балів
1	Студент написав повний конспект за даною темою в зошит (або роздрукував у окрему власну папку)	3б
	Студент написав неповний конспект за даною темою в зошит (або роздрукував у окрему власну папку), але більше половини	1,5б
	В іншому випадку	-1б
2	Відповіді на питання для самоконтролю	
	Студент правильно відповів на п'ять запропонованих йому питань з даного переліку – по 0,4 б за правильну відповідь	2б
	Студент дав, але не повну відповідь – 0, 2 б	0,2б - 1б
	Студент не відповів або не правильно відповів на поставлене питання – по (-0,5б) за питання	-2б

Бали отримані за кожен вид роботи складаються і отримаємо загальну кількість балів за даною темою.

Табличка оцінювання за 5- ти бальною системою

За модульною системою	За 5- ти бальною системою
4,5-5,0 б	5- відмінно
3,5 – 4,4 б	4- добре
2,5 – 3,4 б	3- задовільно
менше 2,4 б	2- незадовільно

Робота виконується вдома в робочому або окремому зошиті для самостійних робіт, або в окремій папці для самостійних робіт. Кількість часу на виконання роботи – 4 годин.

План самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика»

Пряма лінія

Мета: *знати:* загальний вигляд прямої на площині;
рівняння прямої, яка проходить через початок координат, рівняння осей координат.
вміти: будувати прямі на площині.

Час – 2 години

Навчальні питання:

1. Пряма на площині.
2. Пряма, паралельна осі Ох, Оу..

Методичні рекомендації

Самостійно вивчаючи запропоновану тему студент повинен засвоїти такі основні положення:

По-перше: вивчити рівняння прямих на площині.

По-друге: вміти будувати прямі на площині.

Рекомендована література:

5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.
3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с

I Теоретичний матеріал

Рівняння прямих, паралельних осям координат. Рівняння осей координат.

Рівняння прямої, паралельної осі Oy , має вигляд

$$x = a.$$

Всі точки цієї прямої віддалені від осі Oy на одну і ту ж відстань, яка дорівнює a .

Рівняння прямої, паралельної осі Ox , має вигляд

$$y = b.$$

Всі точки цієї прямої віддалені від осі Ox на одну і ту ж відстань, яка дорівнює b .

Якщо $a > 0$, то пряма розташована справа від осі Oy , якщо $a < 0$, то пряма розташована зліва від осі Oy . Якщо $a = 0$, то пряма співпадає з віссю Oy . У цьому випадку маємо рівняння осі Oy :

$$x = 0.$$

Якщо $b > 0$, то пряма розташована вище осі Ox , якщо $b < 0$, то пряма розташована нижче осі Ox . Якщо $b = 0$, то пряма співпадає з віссю Ox . В цьому випадку маємо рівняння осі Ox :

$$y = 0.$$

Рівняння прямої, яка проходить через початок координат.

Рівняння прямої, яка проходить через початок координат, має вигляд

$$y = kx,$$

де k – кутовий коефіцієнт; x, y – координати точки.

Кутовий коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до осі Ox :

$$k = \tan \alpha.$$

Відмітимо, що кутом нахилу прямої до осі Ox називається кут, на який потрібно повернути додатний напрям осі Ox біля точки перетину прямої з віссю Ox , проти руху часової стрілки, до співпадіння з прямою (рис.1).

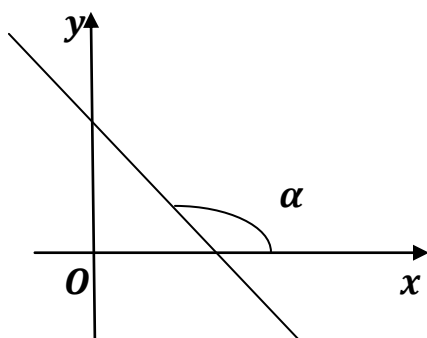


Рис.1

Якщо пряма паралельна осі Ox , то кут нахилу дорівнює 0^0 . Кут нахилу довільної прямої до осі Ox буде мати значення у межах між 0^0 і 180^0 ($0^0 \leq \alpha < 180^0$).

Якщо $0^0 < \alpha < 90^0$ (гострий кут), то $k > 0$; якщо $90^0 < \alpha < 180^0$ (тупий кут), то $k < 0$.

При $\alpha = 90^0$ кутового коефіцієнта не існує, так як $tq90^0$ не має числового значення. Тобто, довільна пряма, яка перпендикулярна до осі Ox ($x = a$), не має кутового коефіцієнта.

Якщо на прямій, яка проходить через початок координат, взяти точку $A(x_A; y_A)$, то

$$k = tq\alpha = \frac{y_A}{x_A}.$$

Кут α у загальному вигляді пишеться через аркфункцію:

$$\alpha = arctqk.$$

Бісектриси 1 і 3, 2 і 4 координатних кутів мають відповідно рівняння

$$y = x \quad \text{та} \quad y = -x.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ.

1. Побудувати прямі: $x = 3$, $x = -2$, $x = 0$.

Розв'язання. На осі Ox будуюмо точки: $x = 3$, $x = -2$. Через ці точки проводимо прямі, які паралельні осі Oy (рис.2). Пряма $x = 0$ є віссю Oy .

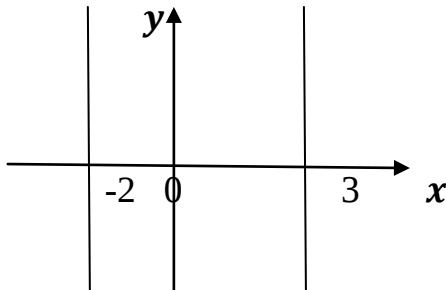


Рис.2

2. Побудувати прямі: $y = 4$, $y = -1$, $y = 0$.

Розв'язання. На осі Oy будуюмо точки: $y = 4$, $y = -1$. Через ці точки проводимо прямі, які паралельні осі Ox (рис.3). Пряма $y = 0$ є віссю Ox .

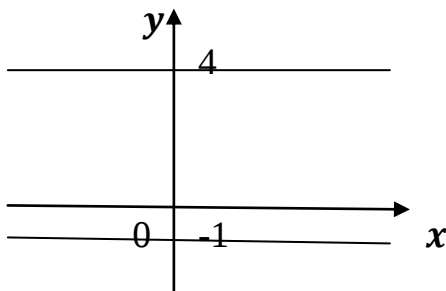


Рис.3

3. Пряма, яка паралельна осі Ox , проходить через точку $(-2;3)$. Скласти рівняння цієї прямої.

Розв'язання. Пряма, яка паралельна осі Ox , має вигляд $y = v$. Ордината точки, через яку проходить шукана пряма, дорівнює 3; звідси слідує, що рівняння прямої має вигляд: $y = 3$ або $y - 3 = 0$.

4. Сторони прямокутника дорівнюють 3 і 5. Скласти рівняння всіх його сторін, якщо прямокутник знаходиться в першому координатному куту так, що дві з його сторін співпадають з осями координат, причому більша із сторін співпадає із віссю Ox .

Розв'язання. Побудуємо заданий прямокутник (рис.4).

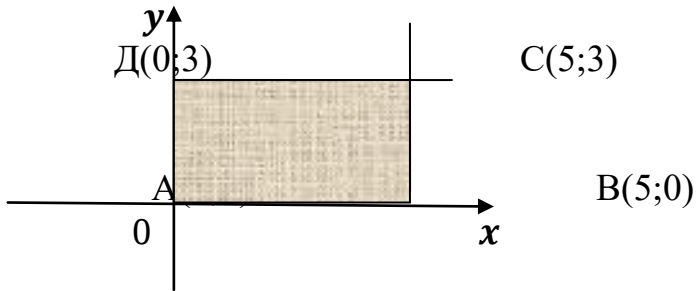


Рис.4

Із побудови бачимо, що вершини прямокутника мають координати: $A(0;0)$, $B(5;0)$, $C(5;3)$ та $D(0;3)$.

Тепер легко скласти рівняння сторін:

AB: $y = 0$ (вісь Ox);

BC: $x = 5$ (проходить через точку $B(5;0)$);

CD: $y = 3$ (проходить через точку $D(0;3)$);

DA: $x = 0$ (вісь Oy).

5. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат, якщо її кутовий коефіцієнт $k = 5$.

Розв'язання. Для складання рівняння прямої, яка проходить через початок координат, необхідно знати один параметр – кутовий коефіцієнт k . Якщо k дано, то для отримання рівняння шуканої функції достатньо підставити числове значення k в рівняння $y = kx$. Маємо: $y = 5x$.

6. Обчислити, під яким кутом до осі Ox проходить пряма $y = x$.

Розв'язання. Кут α знаходимо із співвідношення $k = \operatorname{tg} \alpha$:

$$y = x, \quad k = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = 1, \quad \alpha = 45^\circ.$$

7. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і точку $A(-2;3)$.

Розв'язання. З умови задачі маємо: $x_A = -2$, $y_A = 3$. Із співвідношення $k = \tan \alpha = \frac{y_A}{x_A}$ знаходимо k : $k = -\frac{3}{2}$. Підставивши значення k в рівняння $y = kx$, отримаємо $y = -\frac{3}{2}x$ або $3x + 2y = 0$.

Можна обчислити k , підставивши координати точки A в рівняння $y = kx$ замість змінних x та y : $3 = k(-2)$, звідки $k = -\frac{3}{2}$.

II Розв'язування практичних завдань

1. Побудувати прямі: $x = 4$, $x = -3$.

2. Побудувати прямі: $y = 2$, $y = -4$.

3. Пряма, яка паралельна осі Ox , проходить через точку $(3; -4)$. Скласти рівняння цієї прямої.

4. Пряма, яка паралельна осі Oy , проходить через точку $(-6; 0)$. Скласти рівняння цієї прямої.

5. Побудувати фігуру, обмежену лініями $x = -2$, $x = 0$, $y = -3$ та $y = 0$.

Обчислити площу цієї фігури.

6. Скласти рівняння сторін квадрата, якщо він знаходиться в першому координатному куті і дві його вершини мають координати $A(2; 0)$ та $B(5; 0)$.

7. Побудувати прямі: $y = 3x$, $y = -3x$, $y = \frac{1}{2}x$.

8. Чи належать точки $A(3; 6)$, $B(-1; -2)$ і $C(4; 10)$ прямій $y = 2x$?

9. Обчислити, під яким кутом до осі Ox проходить пряма $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

10. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і точку $A(-1; -5)$.

Питання для самоконтролю:

1. Який вигляд має рівняння прямої, паралельної осі Ox ?

2. Який вигляд має рівняння прямої, паралельної осі Oy ?

3. Як виглядає рівняння прямої, яка проходить через початок координат?

4. Яке рівняння осей координат?

Критерії оцінювання теми «Пряма лінія», винесеної на самостійне вивчення.
 Максимальна кількість балів набраних за даною темою оцінюється в 5 балів. Види завдань та їх оцінювання, за даною темою наведені в таблиці:

№ п/п	Вид роботи	Кількість набраних балів
1	Розв’язання практичного завдання Студент правильно розв’язав практичне завдання .	3 б
	Студент розв’язав практичне завдання частково правильно.	1,5 б
	Студент взагалі не розв’язував приклади	-1б
2	Відповіді на питання для самоконтролю Студент правильно відповів на чотири запропоновані йому питання з даного переліку – по 0,5 б за правильну відповідь	2 б
	Студент дав , але не повну відповідь – по 0,25б	0,25б -1б
	Студент не відповів або не правильно відповів на поставлене питання	-1 б

Бали отримані за кожен вид роботи складаються і отримаємо загальну кількість балів за даною темою.

Табличка оцінювання за 5- ти бальною системою

За модульною системою	За 5- ти бальною системою
4,5-5,0 б	5- відмінно
3,5 – 4,4 б	4- добре
2,5 – 3,4 б	3- задовільно
менше 2,4 б	2- незадовільно

Робота виконується вдома в робочому або окремому зошиті для самостійних робіт, або в окремій папці для самостійних робіт. Кількість часу на виконання роботи – 4 годин.

План самостійної роботи

з навчальної дисципліни «Вища математика»

Комплексні числа та дії над ними

Мета: *знати:* означення комплексного числа;

формули обчислення додавання, віднімання, множення і ділення комплексних чисел.

вміти: виділяти дійсну та уявну частини комплексного числа;

виконувати дії над комплексними числами.

Час – 4 години

Навчальні питання:

1. Визначення комплексного числа.
2. Арифметичні дії над комплексними числами

Методичні рекомендації

Самостійно вивчаючи запропоновану тему студент повинен засвоїти такі основні положення:

По-перше: вивчити означення і властивості комплексних чисел.

По-друге: вивчити формули обчислення додавання, віднімання, множення і ділення комплексних чисел.

Рекомендована література:

3. Денисюк, В. П. Вища математика: навч. посібник у 4-х ч. [Текст] / В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч.1,2,3.– 296 с.
5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

I Теоретичний матеріал

Комплексним числом z називається вираз $z = a + bi$, де a і b - дійсні числа, а i - уявна одиниця, яка визначається рівністю $i = \sqrt{-1}$ або $i^2 = -1$;

де a називається дійсною частиною, b - уявною частиною числа z . Їх позначають так:

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z.$$

Два комплексних числа називаються *рівними*, якщо рівні їх дійсні та уявні частини:

$$z_1 = a_1 + b_1i \text{ і } z_2 = a_2 + b_2i, \text{ то } z_1 = z_2, \text{ якщо } a_1 = a_2 \text{ і } b_1 = b_2.$$

Два комплексних числа називаються *протилежними*, якщо протилежні їх дійсні та уявні частини: $z_1 = -a_1 + b_1i$ і $z_2 = a_2 - b_2i$.

Два комплексних числа називаються *комплексно спряженими*, якщо рівні їх дійсні частини, а уявні протилежні: $z_1 = a_1 + b_1i$ і $\bar{z}_1 = a_1 - b_1i$

Комплексне число *дорівнює нулю* тоді і тільки тоді, коли дійсні та уявні частини дорівнюють нулю: $a + bi = 0$, то $a = 0$ і $b = 0$.

Комплексне число називається *уявним*, якщо його дійсна частина дорівнює нулю: $z = bi$, якщо $a = 0$.

Форму запису комплексного числа $z = a + bi$ називають алгебраїчною.

Дії над комплексними числами $z_1 = a_1 + b_1i$ і $z_2 = a_2 + b_2i$ в алгебраїчній формі виконують за такими правилами:

1. Додавання $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
2. Віднімання $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$
3. Множення $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
4. Ділення ($z_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

де $\bar{z}_2 = a_2 - b_2i$ - комплексно спряжене число до числа $z_2 = a_2 + b_2i$

II Розв'язування практичних завдань

Індивідуальні завдання

Знайдіть дійсні та уявні частини комплексних чисел.

$$1.1.1.z = \frac{2-i}{i+2} + (1-i)^4$$

$$1.1.5.z = \frac{i-1}{i+1} - \frac{2-3i}{1-2i}$$

$$1.1.9.z = \frac{(4-i)(2i+1)}{i} + i^{21}$$

$$1.1.13.z = \frac{(1-i)^4}{(3i-1)(i+3)}$$

$$1.1.17.z = \frac{(1-i^9)(3+i)}{(i-3)^3}$$

$$1.1.21.z = \left(\frac{3-i}{3+i}\right)^4 - \frac{1}{i^7}$$

$$1.1.25.z = \frac{(i-1)(2i+5)}{(3-i)^4}$$

$$1.1.4.z = \frac{1-i^5}{(i+1)^5}$$

$$1.1.8.z = \frac{(2-i)^4}{(2i-1)(i+2)}$$

$$1.1.12.z = \frac{2-i}{i+2} - \frac{3-4i}{2-3i}$$

$$1.1.16.z = \frac{(1-i^3)(2+i)}{(1+2)^4}$$

$$1.1.20.z = \frac{(1-2i)^4}{(i+3)(3i+1)}$$

$$1.1.24.z = \frac{3-2i}{2i+3} + \frac{4-3i}{2-i}$$

$$1.1.28.z = \frac{(1+i^{11})(2+3i)}{(2i-1)^2}$$

$$1.1.27.z = \frac{-2+i}{i-3} + (3i-1)^3$$

$$1.1.3.z = \frac{(2-i)^3}{(i+2)^2} + 2i + 3$$

$$1.1.7.z = \frac{(1-i)(2+3i)}{2i+1} + i^{12}$$

$$1.1.11.z = \frac{(2+i)(4+5i)}{2i-1} + i^{32}$$

$$1.1.15.z = \frac{4+i}{4i-1} + (i-2)^3$$

$$1.1.19.z = \frac{1+2i}{i+2} + \frac{2-i}{1-2i}$$

$$1.1.23.z = \frac{(1+3i)(5-2i)}{4i-1} - i^{46}$$

$$1.1.2.z = \frac{2+i}{3i-1} + (2i-1)^3$$

$$1.1.6.z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4 + \frac{1}{i}$$

$$1.1.10.z = \frac{(2-i)^4}{(2i-3)(i+4)}$$

$$1.1.14.z = \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^4 + \frac{2}{i^3}$$

$$1.1.18.z = \frac{(4-i)(2+5i)}{3i+1} + i^{51}$$

$$1.1.22.z = \frac{(i+2i)^4}{(i+4)(4i+1)}$$

$$1.1.26.z = \left(\frac{1+2i}{1-2i}\right)^4 + \frac{i^{18}}{2i}$$

$$1.1.30.z = \frac{i}{(i+1)^3} + i^{111} \cdot (2-i)^2$$

$$1.1.29.z = \frac{1+3i}{(i+2)^2} + \frac{3-i}{(2-i)^2}$$

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте означення комплексного числа?

2. Які властивості є у комплексних чисел?

3. Наведіть формули додавання (віднімання) комплексних чисел?

4. Наведіть формули множення (ділення) комплексних чисел?

5. Як піднести уявну одиницю до степеня?

Критерії оцінювання теми № , винесеної на самостійне вивчення.

Максимальна кількість балів набраних за даною темою оцінюється в 5 балів. Види завдань та їх оцінювання, за даною темою наведені в таблиці:

№ п/п	Вид роботи	Кількість набраних балів
1	Розв'язання індивідуального завдання Студент правильно розв'язав свій варіант індивідуального завдання – по 1,5 б за приклад. Студент розв'язав свій варіант індивідуального завдання частково правильно – по 0,75 б за приклад. Студент взагалі не розв'язував приклади	3 б 0,75 – 1,5 б -1б
2	Відповіді на питання для самоконтролю Студент правильно відповів на п'ять запропоновані йому питання з даного переліку – по 0,4 б за правильну відповідь Студент дав , але не повну відповідь – по 0,2б за питання Студент не відповів або не правильно відповів на поставлене питання	2 б 0,2б -1 б -1 б

Бали отримані за кожен вид роботи складаються і отримаємо загальну кількість балів за даною темою.

Табличка оцінювання за 5- ти бальною системою

За модульною системою	За 5- ти бальною системою
4,5-5,0 б	5- відмінно
3,5 – 4,4 б	4- добре
2,5 – 3,4 б	3- задовільно
менше 2,4 б	2- незадовільно

Робота виконується вдома в робочому або окремому зошиті для самостійних робіт, або в окремій папці для самостійних робіт. Кількість часу на виконання роботи – 4 годин.

План самостійної роботи

з навчальної дисципліни «Вища математика»

Криві другого порядку

Мета: *знати:* означення кривої другого порядку;
 Означення кола та його елементів;
 Означення еліпса та його елементів;
 Означення гіперболи та його елементів;
 Означення параболи та її елементів.
вміти: будувати коло та визначати його елементи;
 будувати еліпс та визначати його елементи ;
 будувати гіперболу та визначати його елементи;
 будувати параболу та визначати її елементи.

Час – 2 години

Навчальні питання:

1. Криві другого порядку.
2. Коло та його елементів
3. Парабола та його елементів
4. Еліпс та його елементів.
5. Гіпербола та його елементів

Методичні рекомендації

Самостійно вивчаючи запропоновану тему студент повинен засвоїти такі основні положення:

По-перше: вивчити поняття кривої другого порядку.

По-друге: звернути увагу на будову кривих другого порядку.

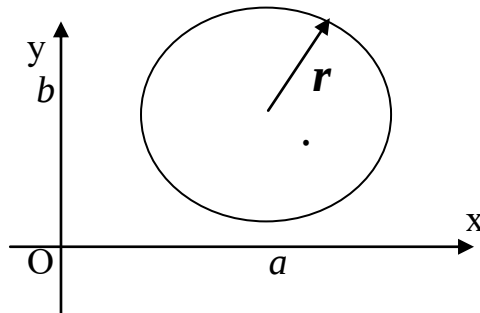
Рекомендована література:

3. Денисюк, В. П. Вища математика: навч. посібник у 4-х ч. [Текст] / В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч.1,2,3.– 296 с.
5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.
6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

Навчальні матеріали для самостійної роботи на тему
Криві другого порядку

I Теоретичний матеріал

Колом називається безліч всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї площини, яка називається центром.



Рівняння кола з центром на початку координат і радіусом r має вигляд

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (1)$$

Рівняння кола з центром в точці $O_1(a;b)$ і радіусом r має вигляд

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \quad (2)$$

Рівняння кола в загальному вигляді записується так:

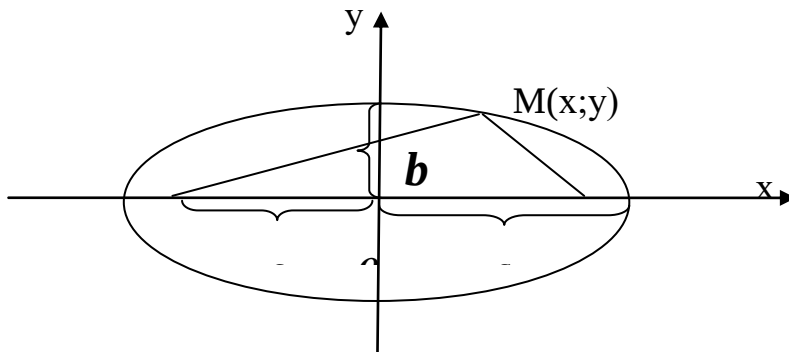
$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0, \quad (3)$$

де A, B, C і D - постійні коефіцієнти.

Щоб знову отримати рівняння кола, треба в лівій частині рівняння виділити повні

квадрати $(x + \frac{m}{2})^2 + (y + \frac{n}{2})^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p$

Еліпсом називається множина точок площини, сума відстаней яких до двох даних точок, які називаються фокусами, є незмінною ($2a$), велика відстані між фокусами ($2c$).



Рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox , має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b), \quad (4)$$

де a - довжина великої півосі; b - довжина малої півосі. Залежність між параметрами a, b і c виражається співвідношенням

$$a^2 - b^2 = c^2. \quad (5)$$

Ексцентриситетом еліпса називається відношення фокусної відстані $2c$ до великої осі $2a$:

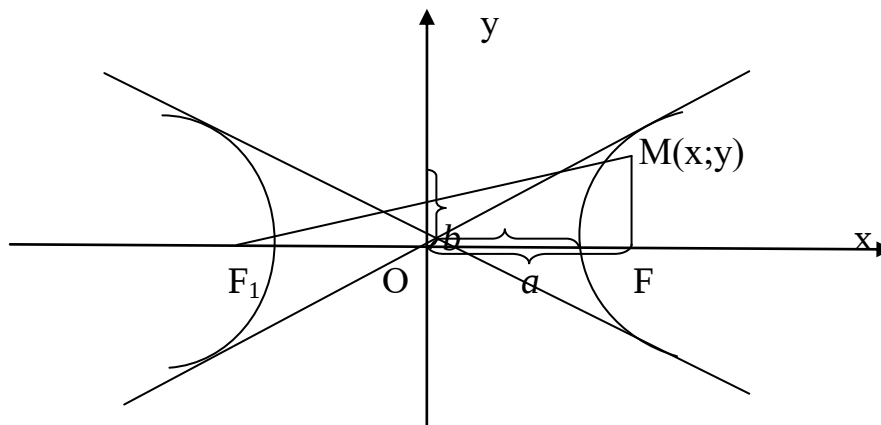
$$e = c/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a < 1. \quad (6)$$

Якщо фокуси еліпса лежать на осі Oy , то його рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > b). \quad (7)$$

У всіх завданнях на еліпс передбачається, що осі симетрії еліпса збігаються з осями координат.

Гіперболою називається безліч точок площини, абсолютна величина різниці яких до двох даних точок, які називаються фокусами, є незмінною ($2a$), менша відстані між фокусами ($2c$).



Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ox , має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (8)$$

де a - довжина дійсної півосі; b - довжина уявної півосі.

Залежність між параметрами a , b і c виражається співвідношенням

$$b^2 = c^2 - a^2. \quad (9)$$

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення фокусної відстані до її дійсної осі:

$$e = c / a = \sqrt{a^2 + b^2} / a > 1. \quad (10)$$

Гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких

$$y = \pm(b/a)x. \quad (11)$$

Якщо дійсна і уявна осі гіперболи рівні ($a = b$), то гіпербола називається рівносторонній. Рівняння рівносторонньої гіперболи записується у вигляді

$$x^2 - y^2 = a^2, \quad (12)$$

а рівняння її асимптот

$$y = \pm x. \quad (13)$$

Якщо фокуси гіперболи лежать на осі Oy , то її рівняння має вигляд

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \text{ або } \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1, \quad (14)$$

а рівняння асимптот такої гіперболи $y = \pm(a/b)x$. (15)

Формули (9) і (10) для гіперболи з фокусами на осі Oy залишаються без змін.

Гіперболи (8) і (14) називаються сполученими.

Рівняння рівносторонньої гіперболи з фокусами на осі Oy має вигляд

$$y^2 - x^2 = a^2. \quad (16)$$

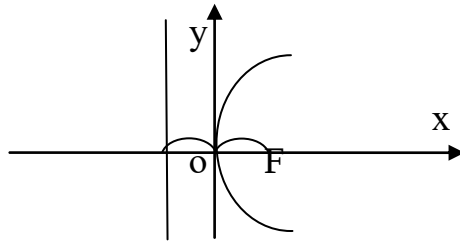
У всіх завданнях на гіперболу передбачається, що осі симетрії гіперболи збігаються з осями координат.

Параболою називається множина точок на площині, рівновіддалених від даної точки, званої фокусом, і від даної прямої, званої директриса.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої служить вісь Ox і гілки спрямовані вправо, має вигляд

$$y^2 = 2px, \quad (17)$$

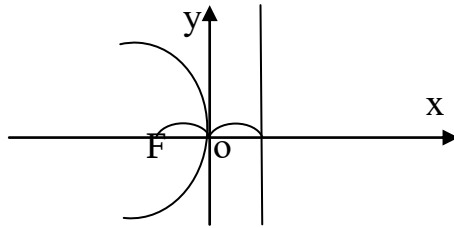
де $p > 0$ (параметр параболи) - відстань від фокуса до директриси. Рівняння її директриси $x = -p/2$.



Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої служить вісь Ox і гілки спрямовані вліво, має вигляд

$$y^2 = -2px (p > 0). \quad (18)$$

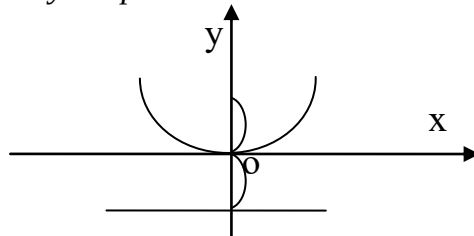
Рівняння її директриси $x = p/2$.



Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої служить вісь Oy і гілки спрямовані вгору, має вигляд

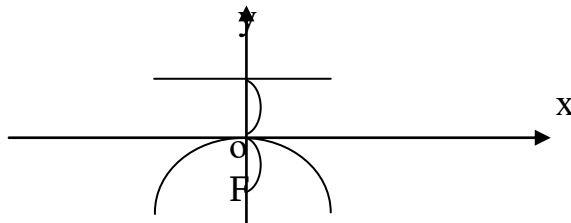
$$x^2 = 2py (p > 0). \quad (19)$$

Рівняння її директриси $y = -p/2$.



Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої служить вісь Oy і гілки спрямовані вниз, має вигляд

$$x^2 = -2py (p > 0). \quad (20)$$



Рівняння її директриси $y = p/2$.

II Розв'язування практичних завдань

Індивідуальні завдання

Завдання 1.1 Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду і побудувати її. Знайти координати вершин і фокусів. Написати рівняння директрис і асимптот, якщо вони є. Обчислити ексцентриситет кривої.

- 1) $4x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$.
- 2) $9x^2 - 4y^2 + 54x + 8y + 41 = 0$.
- 3) $2x^2 + 3y^2 + 12x - 6y + 21 = 0$.
- 4) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$.
- 5) $9x^2 + 16y^2 + 36x - 64y - 44 = 0$.
- 6) $4x^2 - 25y^2 + 8x - 10y + 4 = 0$.
- 7) $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 36 = 0$.
- 8) $x^2 - 4y^2 + 10x + 24y - 7 = 0$.
- 9) $4x^2 + 25y^2 - 8x + 100y + 4 = 0$.
- 10) $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 5 = 0$.
- 11) $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$.
- 12) $9x^2 - 4y^2 + 36x + 8y + 68 = 0$.
- 13) $4x^2 + 9y^2 - 32x + 36y + 64 = 0$.
- 14) $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 16 = 0$.
- 15) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0$.
- 16) $4x^2 - y^2 + 16x - 2y + 15 = 0$.
- 17) $x^2 + 25y^2 + 4x - 150y + 204 = 0$.
- 18) $4x^2 - 9y^2 + 16x + 54y - 101 = 0$.
- 19) $3x^2 + 2y^2 + 12x - 16y + 44 = 0$.
- 20) $9x^2 - 16y^2 - 36x - 64y - 172 = 0$.
- 21) $4x^2 + 9y^2 + 32x - 16y + 37 = 0$.
- 22) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 7 = 0$.
- 23) $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 24 = 0$.
- 24) $4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 11 = 0$.
- 25) $x^2 + 4y^2 + 10x - 24y + 57 = 0$.
- 26) $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 21 = 0$.
- 27) $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 109 = 0$.
- 28) $5x^2 + 3y^2 - 10x + 12y + 17 = 0$.
- 29) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$.
- 30) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$.

Завдання 1.2 Встановити, яку лінію визначає рівняння та побудувати її графік

- 1) $y = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$
- 2) $y = 1 - \frac{2}{5}\sqrt{25 - x^2}$
- 3) $x = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$
- 4) $x = 3 + \frac{7}{2}\sqrt{4 - y^2}$
- 5) $y = -1 + \frac{3}{4}\sqrt{16 + x^2}$
- 6) $y = \frac{5}{6}\sqrt{37 + x^2 + 2x}$
- 7) $y = \frac{4}{7}\sqrt{50 - 2x + x^2}$
- 8) $y + 1 = \frac{4}{9}\sqrt{81 + x^2}$
- 9) $x = \frac{7}{2}\sqrt{5 - 2y + y^2}$
- 10) $x = \frac{7}{4}\sqrt{25 + 6y + y^2}$

$$11) x - 2 = -\frac{5}{7}\sqrt{49 + y^2}$$

$$12) y = 1 - 3\sqrt{1 - x^2}$$

$$13) x - 2 = \frac{9}{7}\sqrt{49 + y^2}$$

$$14) y - 1 = \frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$$

$$15) x = -\frac{7}{9}\sqrt{80 - 2y - y^2}$$

$$16) y = 2 - \frac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}$$

$$17) y = -2 - \frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$$

$$18) x = 2 - \frac{5}{4}\sqrt{16 - y^2}$$

$$19) x = 3 - \frac{3}{7}\sqrt{49 - y^2}$$

$$20) y = 2 - \frac{3}{5}\sqrt{49 - y^2}$$

$$21) y = -\frac{6}{5}\sqrt{29 + 4x + x^2}$$

$$22) y = -\frac{7}{4}\sqrt{20 - 4x + x^2}$$

$$23) y - 2 = -\frac{9}{5}\sqrt{25 + x^2}$$

$$24) x = -\frac{3}{7}\sqrt{53 + 4y + y^2}$$

$$25) x = \frac{8}{3}\sqrt{25 - 16y + y^2}$$

$$26) x + 1 = -\frac{4}{3}\sqrt{9 + y^2}$$

$$27) x + 3 = -2\sqrt{4 - y^2}$$

$$28) y = -\frac{3}{5}\sqrt{24 - 2x - x^2}$$

$$29) x + 1 = -\frac{7}{9}\sqrt{81 + y^2}$$

$$30) y = \frac{2}{5}\sqrt{26 + 2x + x^2}$$

Питання для самоконтролю:

1. Означення кола та його елементів;
2. Означення еліпса та його елементів;
3. Означення гіперболи та його елементів;
4. Означення параболи та її елементів.
5. Означення кривої другого порядку.

Критерії оцінювання теми «Криві другого порядку», винесеної на самостійне вивчення.

Максимальна кількість балів набраних за даною темою оцінюється в 5 балів. Види завдань та їх оцінювання, за даною темою наведені в таблиці:

№ п/п	Вид роботи	Кількість набраних балів
1	Розв’язання індивідуального завдання Студент правильно розв’язав свій варіант індивідуального завдання – по 1,5 б за приклад. Студент розв’язав свій варіант індивідуального завдання частково правильно – по 0,75 б за приклад. Студент взагалі не розв’язував приклади	3 б 0,75 – 1,5 б -1б
2	Відповіді на питання для самоконтролю Студент правильно відповів на два запропоновані йому питання з даного переліку – по 0,4 б за правильну відповідь Студент дав , але не повну відповідь – по 0,2б за питання Студент не відповів або не правильно відповів на поставлене питання	2 б 0,2б -1 б -1 б

Бали отримані за кожен вид роботи складаються і отримаємо загальну кількість балів за даною темою.

Табличка оцінювання за 5- ти бальною системою

За модульною системою	За 5- ти бальною системою
4,5-5,0 б	5- відмінно
3,5 – 4,4 б	4- добре
2,5 – 3,4 б	3- задовільно
менше 2,4 б	2- незадовільно

Робота виконується вдома в робочому або окремому зошиті для самостійних робіт, або в окремій папці для самостійних робіт. Кількість часу на виконання роботи – 2 години.

План самостійної роботи №

з навчальної дисципліни «Вища математика»

Похідна функцій 2 порядку

Мета: *знати:* означення похідної функцій;

Правила диференціювання ;

Таблицю похідних функцій.

вміти: обчислювати похідну складної функції першого і другого порядків;

Час – 4 години

Навчальні питання:

1. Похідна складної функції першого порядку.

2. Похідна складної функції другого порядку.

Методичні рекомендації

Самостійно вивчаючи запропоновану тему студент повинен засвоїти такі основні положення:

По-перше: вивчити таблицю і правила диференціювання.

По-друге: звертати увагу на складну функцію і застосування до неї правил диференціювання.

Рекомендована література:

6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

3. Денисюк, В. П. Вища математика: навч. посібник у 4-х ч. [Текст] / В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч.1,2,3.– 296 с.

5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

Навчальні матеріали для самостійної роботи на тему
Похідна функцій 2 порядку

I Теоретичний матеріал

Основні правила диференціювання.

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ - диференційовані в точці x функції, C -стала. Тоді правильні формули :

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

$$2) (u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$3) \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ если } v \neq 0$$

$$4) (Cu)' = Cu'$$

Таблиця похідних (формули диференціювання основних елементарних функцій)

$$1) C' = 0;$$

$$9) (\sin x)' = \cos x$$

$$2) (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$$

$$10) (\cos x)' = -\sin x$$

$$3) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$11) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$4) \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$12) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$5) (e^x)' = e^x$$

$$13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$6) (a^x)' = a^x \ln a$$

$$14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$7) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$15) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$8) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$16) (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Похідна складеної функції

Якщо функція $u = g(x)$ має похідну в точці x , а функція $y = f(u)$ - у відповідній точці $u = g(x)$, то складена функція $y = f(g(x))$ диференційована в точці x , причому

$$y' = f'(u) \cdot g'(x).$$

Тобто, похідна складеної функції $y = f(u)$, $u = g(x)$ дорівнює добутку похідної від зовнішньої функції, взятої по внутрішньому аргументу u , і похідної від внутрішньої функції, взятої по незалежній змінній x

Похідна оберненої функції

Нехай $y = f(x)$ і $x = g(y)$ - пара взаємно обернених функцій.

Теорема: Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна на інтервалі $(a; b)$ і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ у довільній точці цього інтервалу, тоді існує обернена функція $x = g(y)$, яка також має похідну $g'(y)$ причому

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

II Розв'язування практичних завдань

Індивідуальні завдання

Завдання 1. Знайти другу похідну заданої функції

$$1. y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$11. y = \frac{x^2+x}{x-1}$$

$$21. y = \frac{2x}{x^2+4}$$

$$2. y = \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

$$12. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$22. y = x e^{-x^2}$$

$$3. y = \arcsin \sqrt{x}$$

$$13. y = \ln(x^2 + x + 1)$$

$$23. y = \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^2$$

4. $y = \frac{x+2}{x^2-x}$

5. $y = xe^{-x}$

6. $y = x\sqrt{1-x^2}$

7. $y = \frac{\sqrt{1+x}}{x^2}$

8. $y = \arctg x^2$

9. $y = e^{-x} \cos 2x$

10. $y = xe^{x^2}$

14. $y = \frac{2-x^2}{x^2+1}$

15. $y = x \arctg x$

16. $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$

17. $y = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$

18. $e^{2x} \sin 3x$

19. $y = x \ln(x^2 + 1)$

20. $y = (1 + x^2) \arctg x$

24. $y = \sin^3 x$

25. $y = \frac{\ln x}{x^2}$

26. $y = \frac{x^2+1}{x+3}$

27. $y = \ln^2(x + 1)$

28. $y = \frac{x^2}{x-1}$

29. $y = \arctg^2 x$

30. $y = x \ln(1 + x^2)$

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте означення похідної функції?
2. Сформулюйте правила диференціювання для складної функції?
3. Наведіть таблицю похідних для складних функцій?
4. Сформулюйте означення складної функції?

Критерії оцінювання теми № , винесеної на самостійне вивчення.

Максимальна кількість балів набраних за даною темою оцінюється в 5 балів. Види завдань та їх оцінювання, за даною темою наведені в таблиці:

№ п/п	Вид роботи	Кількість набраних балів
1	Розв'язання індивідуального завдання Студент правильно розв'язав свій варіант індивідуального завдання – по 1,5 б за приклад. Студент розв'язав свій варіант індивідуального завдання частково правильно – по 0,75 б за приклад. Студент взагалі не розв'язував приклади	3 б 0,75 – 1,5 б -1 б
2	Відповіді на питання для самоконтролю Студент правильно відповів на чотири запропоновані йому питання з даного переліку – по 0,5 б за правильну відповідь Студент дав , але не повну відповідь – по 0,25 б за питання Студент не відповів або не правильно відповів на поставлене питання	2 б 0,25 б -1 б -1 б

Бали отримані за кожен вид роботи складаються і отримаємо загальну кількість балів за даною темою.

Табличка оцінювання за 5- ти бальною системою

За модульною системою	За 5- ти бальною системою
4,5-5,0 б	5- відмінно
3,5 – 4,4 б	4- добре

2,5 – 3,4 б	3- задовільно
менше 2,4 б	2- незадовільно

Робота виконується вдома в робочому або окремому зошиті для самостійних робіт, або в окремій папці для самостійних робіт. Кількість часу на виконання роботи – 2 години.

План самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика»

Похідна складної функції

Мета: *знати:* означення похідної функції;

Означення складної функції;

Таблицю похідних складної функції.

вміти: обчислювати похідну складної функції;

Час – 4 години

Навчальні питання:

1. Складна функція.
2. Похідна складної функції.

Методичні рекомендації

Самостійно вивчаючи запропоновану тему студент повинен засвоїти такі основні положення:

По-перше: вивчити поняття складної функції.

По-друге: звертати увагу застосування правил диференціювання до складної функції.

Рекомендована література:

3. Денисюк, В. П. Вища математика: навч. посібник у 4-х ч. [Текст] / В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч.1,2,3.– 296 с.
5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.
6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

Навчальні матеріали для самостійної роботи на тему
Похідна складної функції

I Теоретичний матеріал

Розглянемо похідну складної функції.

Нехай зміна y є функцією від змінної u : $y=f(u)$, а змінна u є функцією від незалежної змінної x : $u=\varphi(x)$, тобто задана складна функція $y=f[\varphi(x)]$.

Теорема. Якщо $y=f(u)$ та $u=\varphi(x)$ – диференційовані функції своїх аргументів, то похідна складної функції існує та дорівнює похідній даної функції за проміжним аргументом, помноженій на похідну самого проміжного аргументу за незалежною зміною x , тобто

$$y' = f(u)u'. \quad (13.4.1)$$

Доведення. Надамо аргументу x приріст $\Delta x \neq 0$. Тоді функції $u=\varphi(x)$ та $y=f(u)$ відповідно отримають приріст Δu та Δy . Припустимо, що $\Delta u \neq 0$. Тоді через диференційованість функцій $y=f(u)$ можна записати

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u),$$

де $f'(u)$ – величина, яка від Δu не залежить.

Відповідно до теореми про зв'язок нескінченно малої з границею отримаємо

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f(u) + \alpha(\Delta u),$$

де $\alpha(\Delta u)$ – нескінченно мала при $\Delta u \rightarrow 0$, звідки $\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u$.

Поділимо обидві частини останньої рівності на $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \frac{\Delta y}{\Delta u} + \alpha(\Delta u) \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Оскільки за умовою $u=\varphi(x)$ диференційована, то вона неперервна в точці x , отже, при $\Delta x \rightarrow 0$ $\Delta u \rightarrow 0$ і $\alpha(\Delta u) \rightarrow 0$.

Тому, переходячи до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, в останній рівності дістанемо $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)u'$.

Зауваження. Правило диференціювання складної функції $y=f[\varphi(x)]$ можна записати так:

$$y'_x = y'_u u'_x, \text{ або } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx},$$

Для складної функції $y=u^n$, де $u=u(x)$, можна записати:

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'.$$

Нехай задано складну функцію $u=\varphi(x)$, $c=const$. Є такі формули:

$$1) C' = 0; \quad 2) x' = 1; \quad 3) (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'; \quad 4) (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u';$$

$$5) \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}u' \quad 6) (e^u)' = e^u \cdot u'; \quad 7) (a^u)' = a^u \ln a \cdot u';$$

$$8) (\ln u)' = \frac{1}{u}u'; \quad 9) (\log_0 u)' = \frac{u'}{u \ln a}; \quad 10) (\sin u)' = \cos u \cdot u';$$

$$11) (\cos u)' = -\sin u \cdot u'; \quad 12) (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; \quad 13) (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u};$$

$$14) (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad 15) (\arcsin u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$16) (\arctg u)' = \frac{u'}{1+u^2}; \quad 17) (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

II Розв'язування практичних завдань

Індивідуальні завдання

Задача 1. Обчислити похідну функцій.

$$1. y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}$$

$$2. y = x(2x^2 + 5)\sqrt{x^2 + 1} + 3 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$3. y = 3 \arcsin \frac{3}{4x+1} + 2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}$$

$$4. y = \arcsin \frac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2 + 24x + 12}$$

$$5. y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$6. y = \sqrt{(4+x)(1+x)} + 3 \ln(\sqrt{4+x} + \sqrt{1+x})$$

$$7. y = \ln \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2-1} \right) \operatorname{arctg} x$$

$$8. y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x$$

$$9. y = (2+3x)\sqrt{x-1} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}$$

$$10. y = 4 \arcsin \frac{4}{2x+3} + \sqrt{4x^2 + 12x - 7}$$

$$11. y = x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2} (\arcsin x - x)$$

$$12. y = x(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$13. y = \frac{\sqrt{1-e^{-x}}}{\ln \operatorname{tg} x} - \ln(1 + \sqrt[3]{x+1}) + \frac{1}{\cos 2x}$$

$$14. y = \frac{5 - \cos x \sqrt{1-x^4}}{\operatorname{ctg}^3 x} - e^{\frac{2}{x+2}}$$

$$15. y = \frac{e^{-\cos^2 x \sqrt{1+3x}}}{\operatorname{ctg}^2 2x} + \frac{1}{\ln^2 x}$$

$$16. y = x^3 \arccos x - \frac{x^2+2}{3} \sqrt{1-7x^2}$$

$$17. y = 2 \arcsin \frac{2}{3x+1} + \sqrt{9x^2 + 5x - 3}$$

$$18. y = \frac{1}{3} (x-2)\sqrt{x+1} + \ln(\sqrt{x+1} + 1)$$

$$19. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} + \ln \frac{1 - \sqrt{2x-x^2}}{x-1}$$

$$20. y = \sqrt{(3-x)(2+x)} = 5 \arcsin \sqrt{\frac{x+2}{5}}$$

$$21. y = \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$22. y = \ln \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} + \sqrt{3} e^{-x} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$23. y = \sqrt{1-3x-2x^2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x+3}{\sqrt{17}}$$

$$24. y = \left(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{x}\right) \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\arccos 3x}{\sqrt[3]{3x+2}}$$

$$25. y = \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$26. y = x^3 \arcsin \sqrt{x} + \frac{x^2+2}{3} \sqrt{1-x^2}$$

$$27. y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + 2^{2x} \arcsin x - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$28. y = \ln^2(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + \frac{\operatorname{arctg} 2x^3}{1+x}$$

$$29. y = (1 - \operatorname{ctg} 2x) \sqrt{x^2 + 4} - \frac{\arccos 2x}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$30. y = \sqrt{2-2x-x^2} + \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}}$$

Задача 2. Обчислити похідну функцій

$$1. y = 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin^4 x} + 3 \cdot \cos \frac{x}{\sin^2 x}$$

$$2. y = \operatorname{arctg} \frac{2 \sin x}{\sqrt{9 \cos^2 x - 4}}$$

$$3. y = \frac{2^x (\sin x + \cos x \ln 2)}{1 + (\ln 2)^2}$$

$$4. y = \frac{6^x (4x - 4 \operatorname{tg} 4x)}{16 + \ln^2 6}$$

$$5. y = \frac{5^x (\sin 3x \ln 5 - 3 \cos 3x)}{9 + \ln^2 5}$$

$$6. y = \ln \frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}$$

$$7. y = \frac{4^x (\sin 4x - 4 \cos 4x)}{16 + \ln^2 4}$$

$$8. y = \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}}$$

$$9. \frac{5^x (\sin 2x + \ln 5 \cos 2x)}{4 + \ln^2 x}$$

$$10. y = \frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$11. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2 \operatorname{tg} x}}{1 - \operatorname{tg} x}$$

$$12. y = \frac{\operatorname{ctg} x + x}{1 - x \operatorname{ctg} x}$$

$$13. y = \frac{7^x (\sin 3x = \ln 7 \cos 3x)}{9 + \ln^2 7}$$

$$14. y = \frac{1}{\sin a} \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} a)$$

$$15. y = \frac{\sin^2 x}{x \cos x} + \frac{x}{\cos^6 x}$$

$$16. y = \frac{1}{\sin a} \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} a)$$

$$17. y = (\sin \ln x - \cos \ln x) x^{\sqrt{2}}$$

$$18. y = \frac{\sin^2 x}{x \cos x} + \frac{x}{\cos^6 x}$$

$$19. y = (1 + x^2) e^{\operatorname{arctg} x}$$

$$20. y = \ln \frac{\sin a}{x + \sqrt{1 + \cos^2 2x}}$$

$$21. y = \frac{1}{2 \sin \frac{a}{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x \sin \frac{a}{2}}{1-x^2}$$

$$22. y = \frac{2^x (\sin x + \ln \cos ax)}{1 + \sin^2 a}$$

$$23. y = \arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2} \sin x}{b}\right)$$

$$24. y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2 \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$25. y = \frac{\arcsin(4 \sin 4x + \ln 3 \cos 4x)}{16 + \ln^2 3}$$

$$26. y = \ln(1 + e^x) - e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}$$

$$27. y = \sqrt{\frac{1-x^3}{1+x^3}} \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$

$$28. y = x \cos a - \ln \sin(x - a)$$

$$29. y = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \ln(\operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+\sin x})$$

$$30. y = \frac{1}{\cos a} \operatorname{arctg} \frac{x^3 \cos a}{\sqrt{x^3+x}}$$

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте означення похідної функції?
2. Сформулюйте правила диференціювання для складної функції?
3. Наведіть таблицю похідних для складних функцій?
4. Сформулюйте означення складної функції?

Критерії оцінювання теми «Похідна складної функції», винесеної на самостійне вивчення.

Максимальна кількість балів набраних за даною темою оцінюється в 5 балів. Види завдань та їх оцінювання, за даною темою наведені в таблиці:

№ п/п	Вид роботи	Кількість набраних балів
1	Розв'язання індивідуального завдання Студент правильно розв'язав свій варіант індивідуального завдання – по 1,5 б за приклад. Студент розв'язав свій варіант індивідуального завдання частково правильно – по 0,75 б за приклад. Студент взагалі не розв'язував приклади	3 б 0,75б – 1,5 б -1б
2	Відповіді на питання для самоконтролю Студент правильно відповів на чотири запропоновані йому питання з даного переліку – по 0,5б за правильну відповідь Студент дав, але не повну відповідь – по 0,25б за питання Студент не відповів або не правильно відповів на поставлене питання	2 б 0,25б -1 б -1 б

Бали отримані за кожен вид роботи складаються і отримаємо загальну кількість балів за даною темою.

Табличка оцінювання за 5- ти бальною системою

За модульною системою	За 5- ти бальною системою
4,5-5,0 б	5- відмінно
3,5 – 4,4 б	4- добре
2,5 – 3,4 б	3- задовільно
менше 2,4 б	2- незадовільно

Робота виконується вдома в робочому або окремому зошиті для самостійних робіт, або в окремій папці для самостійних робіт. Кількість часу на виконання роботи – 2 години.

План самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика»

Лінійні диференціальні рівняння зі спеціальною правою частиною

Мета: *знати:* означення лінійного неоднорідного рівняння;

означення розв'язку лінійного неоднорідного рівняння;

таблицю похідних та інтегралів функції.

вміти: розв'язувати лінійне неоднорідне рівняння зі спеціальною правою частиною;

Час – 2 години

Навчальні питання:

1. Лінійне неоднорідне рівняння зі спеціальною правою частиною.
2. Загальний розв'язок у залежності від коренів характеристичного рівняння лінійного однорідного рівняння та вигляду правої частини.

Методичні рекомендації

Самостійно вивчаючи запропоновану тему студент повинен засвоїти такі основні положення:

По-перше: вивчити поняття лінійного неоднорідного рівняння зі спеціальною правою частиною.

По-друге: звертати увагу на загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у залежності від коренів характеристичного рівняння лінійного однорідного рівняння та вигляду правої частини.

Рекомендована література:

2. Денисюк, В. П. Вища математика: навч. посібник у 4-х ч. [Текст] / В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч.1,2,3.– 296 с.
6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

Навчальні матеріали для самостійної роботи на тему

Лінійне неоднорідне рівняння зі спеціальною правою частиною

I Теоретичний матеріал

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = f(x) \quad (1)$$

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

де p і q - сталі величини.

Воно відрізняється від відповідного лінійного однорідного рівняння

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$$

присутністю в правій частині деякої функції $f(x)$.

Для знаходження загального розв'язку рівняння (1) спочатку треба знайти загальний розв'язок $\bar{y}$ рівняння (2), а потім знайти деякий частинний розв'язок y^* рівняння (1). Їх сума є загальним розв'язком даного неоднорідного рівняння (1):

$$y = \bar{y} + y^*$$

Правило відшукування частинного розв'язку y^ рівняння (1) в наступних випадках:*

Права частина $f(x)$ має вигляд: $f(x) = e^{kx}P_n(x)$, де $P_n(x)$ - поліном степеня n .

Права частина $f(x)$ має вигляд: $f(x) = a \cos ax + b \sin ax$.

Розглянемо кожний випадок окремо.

1) Нехай права частина рівняння (1) має вигляд: $f(x) = e^{kx}P_n(x)$ причому k не є коренем характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$, яке є відповідним однорідному рівнянню (2). Тоді частинний розв'язок рівняння (1) слід шукати у вигляді: $y^* = e^{kx}Q_n(x)$

де $Q_n(x)$ - деякий поліном того ж степеня n з невизначеними коефіцієнтами.

Якщо ж число k є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок рівняння (1) слід шукати у вигляді: $y^* = x^m e^{kx} Q_n(x)$, де m - кратність кореня k (тобто $m = 1$, якщо k – однократний корінь і $m = 2$, якщо k – двохкратний корінь).

2) Нехай тепер права частина рівняння (1) має вигляд: $f(x) = a \cos ax + b \sin ax$, причому числа $\pm ai$ не є коренями характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок рівняння (1) слід шукати у вигляді: $y^* = A \cos ax + B \sin ax$, де A і B - невизначені коефіцієнти.

Якщо ж комплексні числа $\pm ai$ є коренями характеристичного рівняння, то частинний розв'язок рівняння (1) слід шукати у вигляді:

$$y^* = x(A \cos ax + B \sin ax)$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ.

1. Розв'яжіть рівняння:

$$y'' + 4y' + 3y = (8x^2 + 84x)e^x \quad (1)$$

Розв'язання: Знаходимо розв'язок лінійного однорідного рівняння:

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

Складаємо його характеристичне рівняння і розв'язуємо його:

$$k^2 + 4k + 3 = 0$$

$$k_1 = -1, k_2 = -3$$

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

$$f(x) = (8x^2 + 84x)e^x, \quad k = 1 \text{ (не є коренем характеристичного рівняння)}$$

$$y^* = e^x(Ax^2 + Bx + C)$$

$$y^{*'} = e^x(Ax^2 + Bx + C) + e^x(2Ax + B)$$

$$y^{*''} = e^x(Ax^2 + Bx + C) + 2e^x(2Ax + B) + e^x 2A$$

Після підстановки цих обчислень в рівняння (1) отримаємо: $A = 1, B = 9, C = -7$

$$y^* = e^x(x^2 + 9x - 7)$$

Загальний розв'язок рівняння (1): $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + e^x(x^2 + 9x - 7)$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$y'' + 6y' + 9y = 14e^{-3x}$$

Розв'язання

Знаходимо розв'язок лінійного однорідного рівняння:

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Складаємо його характеристичне рівняння і розв'язуємо його:

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

$$k_1 = k_2 = -3$$

$$\bar{y} = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$$

$$f(x) = 14e^{-3x}, \quad k = -3 \text{ (двократний корінь характеристичного рівняння)}$$

$$y^* = x^2 A e^{-3x}$$

$$y^{*'} = 2Ax e^{-3x} - 3Ax^2 e^{-3x}$$

$$y^{*''} = 2A e^{-3x} - 6Ax e^{-3x} - 6Ax e^{-3x} + 9Ax^2 e^{-3x}$$

$$2A e^{-3x} - 12Ax e^{-3x} + 9Ax^2 e^{-3x} + 12Ax e^{-3x} - 18Ax^2 e^{-3x} + 9Ax^2 e^{-3x} = 14e^{-3x}$$

$$2A - 12Ax + 9Ax^2 + 12Ax - 18Ax^2 + 9Ax^2 = 14$$

$$2A = 14$$

$$A = 7$$

$$y^* = 7x^2 e^{-3x}$$

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x} + 7x^2 e^{-3x}$$

II Розв'язування практичних завдань

1. Знайти загальні розв'язки наступних рівнянь:

1. $y'' - 2y' - 8y = -8x^2 + 4x + 7$

2. $y'' - 6y' + 5y = (3x + 10)e^{-x}$

3. $y'' - 4y' + 3y = 10e^{3x}$

4. $y'' + 16y = (34x + 13)e^{-x}$

5. $y'' + 2y' + 2y = (x + 7)e^{-2x}$

6. $y'' - 5y' = 30x - 11$

$$7. y'' - 3y' - 4y = (20x + 11)e^{-x}$$

$$8. y'' + 4y' = -2xe^{-4x}$$

$$9. y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}$$

$$10. y'' + 3y' = -72\sin 3x$$

$$11. y'' + 2y' + y = 3\cos x + 8\sin x$$

$$12. y'' + 25y = 40\cos 5x$$

$$13. y'' + 9y = 9\cos 3x + 16\sin 3x$$

$$14. y'' - 8y' + 20y = 130\sin 4x$$

$$15. y'' + 5y' + 6y = 3$$

$$16. y'' + y = 4e^x$$

$$17. y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2$$

$$18. y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$$

2. Знайти частинні розв'язки наступних рівнянь:

$$1. y'' - 5y' + 4y = (10x + 43)e^{-x} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$2. y'' - 2y' + 10y = 74\sin 3x \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 3$$

$$3. y'' - 6y' = 18e^{6x} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -9$$

$$4. y'' + 4y = (6x + 5)e^{-2x} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{3}{4}$$

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте означення лінійного неоднорідного рівняння зі спеціальною правою частиною

2. Як виглядає загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння?

Критерії оцінювання теми «Лінійні диференціальні рівняння зі спеціальною правою частиною», винесеної на самостійне вивчення.

Максимальна кількість балів набраних за даною темою оцінюється в 5 балів. Види завдань та їх оцінювання, за даною темою наведені в таблиці:

№ п/п	Вид роботи	Кількість набраних балів
1	Розв'язання індивідуального завдання Студент правильно розв'язав практичне завдання – Студент розв'язав практичне завдання частково правильно – Студент взагалі не розв'язував приклади	3 б 1,5 б -1б
2	Відповіді на питання для самоконтролю Студент правильно відповів на два запропоновані йому питання з даного переліку – по 1 б за правильну відповідь Студент дав не повну відповідь – по 0,5б за питання Студент не відповів або не правильно відповів на поставлене питання	2 б 0,5б - 1б -1 б

Бали отримані за кожен вид роботи складаються і отримаємо загальну кількість балів за даною темою.

Табличка оцінювання за 5- ти бальною системою

За модульною системою	За 5- ти бальною системою
4,5-5,0 б	5- відмінно
3,5 – 4,4 б	4- добре
2,5 – 3,4 б	3- задовільно
менше 2,4 б	2- незадовільно

Робота виконується вдома в робочому або окремому зошиті для самостійних робіт, або в окремій папці для самостійних робіт. Кількість часу на виконання роботи – 2 години.